JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 26, 16–47 (1977)

Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac

MICHEL ENOCK

Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Mathématiques Fondamentales (U.E.R. 48), 4, Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Communicated by the Editors

Received February 1, 1976

We introduce a notion of action of a Kac algebra (see [2, 9]) on a von Neumann algebra, and the cross-product of a von Neumann algebra by a Kac algebra with respect to an action α. The results of Takesaki [11, Chaps. 3 and 4] are then generalized, particularly the theorem of the double cross-product.

INTRODUCTION

Soit G un groupe localement compact. Il apparaît dans [6] que les propriétés d'algèbres de Hopf–von Neumann de $L^\infty(G)$ et $\mathscr{M}(G)$ (algèbre de la représentation régulière gauche de G) interviennent dans la théorie du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par G. Les algèbres de Kac, définies dans [2], dont $L^\infty(G)$ et $\mathscr{M}(G)$ sont des cas particuliers, apparaissent alors comme un instrument raisonnable pour construire une notion plus générale de produit croisé.

Grâce à des résultats techniques de [9] (surtout III.13, III.14, IV.1 et IV.3), on définit une notion d'action d'une algèbre de Kac sur une algèbre de von Neumann. Cela permet de généraliser les constructions du chapitre 3 de [11]; on obtient la construction du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac selon une action, et une notion d'équivalence entre actions.

On généralise ensuite les résultats du chapitre 4 de [11] qui ne traite que le cas des groupes abéliens) concernant la construction d'une action duale et le double produit croisé: les théorèmes 4.5, 4.6 et 4.8 de [11].

Pendant la rédaction de ce travail, Takesaki m'a signalé un mémoire de Nakagami [7] dans lequel se trouvent des résultats similaires, dans le cas des algèbres de Kac abéliennes et des algèbres de Kac symétriques.

En ce qui concerne les algèbres de Kac, on utilise les notations de [2], en identifiant, pour simplifier, M et $\pi_\varphi(M)$, d'une part, H_φ et $H_{\varphi^\wedge}$ d'autre part. L'espace hilbertien $H_\varphi = H_{\varphi^\wedge}$ sera noté simplement H. Les principaux résultats sont regroupés dans [2, 4.3.9].

ISSN 0022-1236

I. Action d'une algèbre de Kac sur une algèbre de von Neumann

I.1. Définitions. (i) Soient $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann. On appellera action à droite de $\mathbb{K}$ sur $\mathfrak{A}$ un morphisme normal injectif $\alpha: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes M$, tel que

$$\alpha(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\alpha \otimes i)\alpha = (i \otimes \Gamma)\alpha.$$

(ii) On appellera action à gauche de $\mathbb{K}$ sur $\mathfrak{A}$ une action à droite de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}^s$ sur $\mathfrak{A}$, autrement dit, un morphisme normal injectif $\alpha: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes M$, tel que

$$\alpha(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\alpha \otimes i)\alpha = (i \otimes s\Gamma)\alpha.$$

Exemple. Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac; le coproduit Γ est une action à droite de $\mathbb{K}$ sur l'algèbre de von Neumann M.

I.2. Définition. Soient G un groupe localement compact, $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann. On appellera action continue de G sur $\mathfrak{A}$ un morphisme $\alpha: g \to \alpha_g$ de G dans Aut $\mathfrak{A}$, tel que, pour tout $x \in \mathfrak{A}$, la fonction $g \to \alpha_g(x)$ de G dans $\mathfrak{A}$, soit ultra $*$ fortement continue. Si l'algèbre $\mathfrak{A}$ est représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{h}$, cette dernière condition est clairement équivalente à: pour tout x de $\mathfrak{A}$, la fonction $g \to \alpha_g(x)$ est fortement continue.

Notations. Soient G un groupe localement compact, $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{h}$. On notera $\mathscr{C}_b(G, \mathfrak{A})$ l'ensemble des fonctions fortement continues, bornées, de G dans $\mathfrak{A}$. On identifiera une fonction f de $\mathscr{C}_b(G, \mathfrak{A})$ avec l'opérateur de multiplication par f dans $L^2(G, \mathfrak{h})$. De plus, on identifiera $L^2(G, \mathfrak{h})$ à l'espace hilbertien $\mathfrak{h} \otimes L^2(G)$; l'ensemble $\mathscr{C}_b(G, \mathfrak{A})$ est alors identifié à une partie de l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{A} \otimes L^\infty(G)$.

I.3. Proposition. *Soient G un groupe localement compact, $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{h}$. Soit $KA(G)$ l'algèbre de Kac abélienne associée au groupe G (cf.* [2, *Proposition* 8.1.1]). *Il existence alors une bijection entre les actions à droite de $KA(G)$ sur $\mathfrak{A}$, et les actions continues de G sur $\mathfrak{A}$. Plus précisémment:*

(i) *Si α est une action continue de G sur $\mathfrak{A}$, l'application qui, à un élément $x \in \mathfrak{A}$, fait correspondre la fonction $s \to \alpha_s(x)$ (resp. $s \to \alpha_{s^{-1}}(x)$) est une action à droite (resp. à gauche) de $KA(G)$ sur $\mathfrak{A}$, qu'on notera α^d (resp. α^g). De plus, on a*

$$\alpha^d = (i \otimes \kappa_G{}^a)\alpha^g \qquad (\textit{cf.}\ [2, 8.1.1])$$

(α^g *est la représentation* π_α *de* [11, 3.1]).

(ii) *Si α est une action à droite (resp. à gauche) de $KA(G)$ sur $\mathfrak{A}$, il existe une unique action continue β de G sur $\mathfrak{A}$, telle que $\alpha = \beta^d$ (resp. $\alpha = \beta^g$) (cf.* [7, *Théorème* 2.1]).

Démonstration de (i). Notons $\alpha^d(x)$ la fonction $s \to \alpha_s(x)$ de G dans $\mathfrak{A}$. C'est un élément de $\mathscr{C}_b(G, \mathfrak{A})$ et donc (cf. I.2) de $\mathfrak{A} \otimes L^\infty(G)$. On a ainsi construit un morphisme normal de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A} \otimes L^\infty(G)$, tel que $\alpha^d(1) = 1$.

Identifions $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ à $L^\infty(G \times G)$. Alors $(\alpha^d \otimes 1)\, \alpha^d(x)$ est égal à la fonction

$$(s, t) \to \alpha_s(\alpha_t(x)).$$

Quand à $(i \otimes \Gamma_G{}^a)\, \alpha^d(x)$, il est égal à la fonction

$$(s, t) \to \alpha_{st}(x).$$

Et donc α^d est une action à droite de $KA(G)$ sur $\mathfrak{A}$. D'autre part, il est clair que $(i \otimes \kappa_G{}^a)\, \alpha^d(x)$ est égal à la fonction $s \to \alpha_{s^{-1}}(x)$.

On pose $\alpha^g = (i \otimes \kappa_G{}^a)\alpha^d$. C'est une action à gauche de $KA(G)$ sur $\mathfrak{A}$. En effet $\kappa_G{}^a$ est un automorphisme de $L^\infty(G)$; de plus:

$$\begin{aligned}(\alpha^g \otimes i)\alpha^g &= (i \otimes \kappa_G{}^a \otimes \kappa_G{}^a)(\alpha^d \otimes i)\alpha^d \\ &= (i \otimes \kappa_G{}^a \otimes \kappa_G{}^a)(i \otimes \Gamma_G{}^a)\alpha^d \\ &= (i \otimes s\Gamma_G{}^a)(i \otimes \kappa_G{}^a)\alpha^d \qquad \text{(par [2, 1.2.1])} \\ &= (i \otimes s\Gamma_G{}^a)\alpha^g.\end{aligned}$$

La démonstration de I.3.(ii) sera donnée plus loin.

I.4. LEMME. *Soient G un groupe localement compact, λ_G sa représentation régulière gauche, $\mathscr{M}(G)$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\lambda_G(G)$. La fonction $s \to \lambda_G(s)$ (qui appartient à $\mathscr{C}_b(G, \mathscr{M}(G))$, et donc à $\mathscr{M}(G) \otimes L^\infty(G)$ d'après* I.2) *est égale à $\sigma W_G{}^*\sigma$, où W_G est l'opérateur fondamental* [2, 2.1.1] *associé à $KA(G)$.*

Démonstration. Soit f dans $L^2(G \times G)$. On a [2, 8.1.7]

$$(W_G f)(s, t) = f(s, st) \qquad (s, t \in G).$$

On en déduit

$$(W_G{}^* f)(s, t) = f(s, s^{-1}t)$$

et

$$(\sigma W_G{}^*\sigma f)(s, t) = f(t^{-1}s, t).$$

On identifie $L^2(G, L^2(G))$ à $L^2(G) \otimes L^2(G)$ et à $L^2(G \times G)$: soit φ un élément de $L^2(G, L^2(G))$, on l'identifie à la fonction $(s, t) \to \varphi(t)(s)$.

On a donc, pour tout φ de $L^2(G, L^2(G))$

$$(\sigma W_G{}^*\sigma\varphi)(t)(s) = \varphi(t)(t^{-1}s) = (\lambda_G(t)\, \varphi(t))(s) \qquad (s, t \in G)$$

ou encore

$$(\sigma W_G{}^*\sigma\varphi)(t) = \lambda_G(t)\,\varphi(t) \qquad (t \in G).$$

D'où le résultat.

I.5. LEMME. *Soient* $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac,* $\mathfrak{A}$ *une algèbre de Von Neumann représentée dans un espace hilbertien* $\mathfrak{k}$. *On a, pour tout* y *de* $\mathfrak{A} \otimes M$

(i) $(i \otimes s\Gamma)(y) = (1 \otimes \sigma W\sigma)(y \otimes 1)(1 \otimes \sigma W^*\sigma)$,

(ii) $(i \otimes \Gamma)(y) = (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(y \otimes 1)(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))^*$,

(iii) $(i \otimes \Gamma)(y) = (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(y \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)$.

Démonstration. Soient y_1 dans $\mathfrak{A}$, y_2 dans M. Alors

$$\begin{aligned}(i \otimes \Gamma)(y_1 \otimes y_2) &= y_1 \otimes \Gamma(y_2)\\ &= y_1 \otimes W(1 \otimes y_2)W^* \qquad \text{par [2, 2.2.5(b)]}\\ &= (1 \otimes W)(y_1 \otimes 1 \otimes y_2)(1 \otimes W^*)\\ &= (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(y_1 \otimes y_2 \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*)\end{aligned}$$

d'où (iii) par linéarité et continuité; de plus, (i) se réduit trivialement de (iii).
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(y_2) &= s \circ \kappa \otimes \kappa \circ \Gamma \circ \kappa(y_2) \qquad [2, 1.2.1]\\ &= s \circ \kappa \otimes \kappa[\Gamma\kappa(y_2{}^*)]^*\\ &= s \circ \kappa \otimes \kappa(\Gamma(\hat{J}y_2\hat{J}))^* && \text{par [2, 3.1.5(a)]}\\ &= s \circ \kappa \otimes \kappa[W(1 \otimes \hat{J}y_2\hat{J})\,W^*]^* && \text{par [2, 2.2.5(b)]}\\ &= s[(\hat{J} \otimes \hat{J})\,W(1 \otimes \hat{J}y_2\hat{J})\,W^*(\hat{J} \otimes \hat{J})] && \text{par [2, 3.1.5(a)]}\\ &= (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})(y_2 \otimes 1)(\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&(i \otimes \Gamma)(y_1 \otimes y_2)\\ &\quad = y_1 \otimes [(\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})(y_2 \otimes 1)(\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})]\\ &\quad = [1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})](y_1 \otimes y_2 \otimes 1)[1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})]\end{aligned}$$

d'où (ii) par linéarité et continuité.

Démonstration de I.3(ii). Soit α une action à gauche de l'algèbre de Kac $KA(G)$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{k}$. Soit y un élément de $\alpha(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A} \otimes L^\infty(G)$; considérons la fonction sur G:

$$t \to (1 \otimes \lambda_G(t))^*\, y(1 \otimes \lambda_G(t)).$$

C'est une fonction continue bornée de G dans $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes L^\infty(G)$; d'après le lemme I.4, elle est égale à

$$(1 \otimes \sigma W_G \sigma)(y \otimes 1)(1 \otimes \sigma W_G{}^* \sigma)$$

et donc, d'après le lemme I.5(i), elle est égale à $(i \otimes {}_S\Gamma_G{}^a)(y)$.

Comme, par définition, α vérifie la relation

$$(i \otimes {}_S\Gamma_G{}^a)\alpha = (\alpha \otimes i)\alpha.$$

Cette fonction est égale à $(\alpha \otimes i)(y)$, et appartient donc à $\alpha(\mathcal{O}\!\mathcal{l}) \otimes L^\infty(G)$.

On en déduit que, pour tout t de G, $(1 \otimes \lambda_G(t))^* y(1 \otimes \lambda_G(t))$ appartient à $\alpha(\mathcal{O}\!\mathcal{l})$.

Soit maintenant un élément x de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. Posons:

$$\beta_t(x) = \alpha^{-1}[(1 \otimes \lambda_G(t))\, \alpha(x)(1 \otimes \lambda_G(t))^*].$$

Cette définition a bien un sens, d'après ce qu'on vient de voir.

Il est clair alors que β_t appartient à Aut $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, et que β est une action continue de G sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$.

Considérons maintenant $\beta^g(x)$, c'est-à-dire la fonction sur G:

$$t \to \beta_{t^{-1}}(x).$$

L'élément $(\alpha \otimes i)\, \beta^g(x)$ sera égal à la fonction sur G:

$$t \to (1 \otimes \lambda_G(t^{-1}))\, \alpha(x)(1 \otimes \lambda_G(t^{-1}))^*.$$

On en déduit donc que:

$$(\alpha \otimes i)\, \beta^g(x) = (\alpha \otimes i)\, \alpha(x)$$

et donc

$$\alpha = \beta^g.$$

Soit maintenant α une action à droite de $KA(G)$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$; $(i \otimes \kappa_G{}^a)\alpha$ est une action à gauche de $KA(G)$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, à laquelle on peut appliquer le résultat précédent: ainsi, il existe une action continue de G sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ telle que

$$(i \otimes \kappa_G{}^a)\alpha = \beta^g = (i \otimes \kappa_G{}^a)\beta^d$$

soit telle que $\alpha = \beta^d$.

Dans les deux cas, l'unicité de β est évidente.

Définition I.6. (i) Soit α une action à droite de l'algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$.

On appellera α-cocycle un unitaire U de $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes M$ tel que

$$(i \otimes \Gamma)(U) = (U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(U).$$

(ii) On notera $I_{\mathbb{K}}{}^{\mathcal{A}}$ l'action triviale de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}$ sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$:

$$I_{\mathbb{K}}{}^{\mathcal{A}}(x) = x \otimes 1 \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Les $I_{\mathbb{K}}{}^{\mathcal{A}}$-cocycles sont donc les unitaires U de $\mathcal{A} \otimes M$ tels que

$$(i \otimes \Gamma)(U) = (U \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(U \otimes 1)(1 \otimes \sigma).$$

PROPOSITION I.7. *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{h}$, α une action à droite de l'algèbre de Kac $KA(G)$ sur $\mathcal{A}$, β l'action continue de G sur $\mathcal{A}$, associée par* I.3(ii), *telle que $\beta^d = \alpha$. Rappelons qu'un β-cocycle est une fonction (ultra-) fortement continue de G dans les unitaires de $\mathcal{A}$*

$$s \to u_s ,$$

telle que

$$u_{st} = u_s\beta_s(u_t) \qquad (s, t \in G).$$

Il existe alors une bijection canonique entre les α-cocycles et les β-cocycles.

Démonstration. Soit $s \to u_s$ un β-cocycle. Soit U la fonction $s \to u_s$; c'est un élément de $\mathscr{C}_b(G, \mathcal{A})$ et donc de $\mathcal{A} \otimes L^\infty(G)$; de plus, c'est un opérateur unitaire. Il est facile de voir que U vérifie la relation $(i \otimes \Gamma)(U) = (U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(U)$.

Pour démontrer la réciproque, il est plus simple, pour des raisons techniques, de prendre une action à gauche:

Soit α une action à gauche de $KA(G)$ sur $\mathcal{A}$, et U un α-cocycle. L'opérateur U est donc un unitaire de $\mathcal{A} \otimes L^\infty(G)$ tel que

$$(i \otimes s\Gamma_G{}^a)(U) = (U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(U).$$

En appliquant I.5(i), on a donc

$$(\alpha \otimes i)(U) = (U^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma W_G \sigma)(U \otimes 1)(1 \otimes \sigma W_G{}^* \sigma). \tag{1}$$

On voit, en appliquant le lemme I.4, que $(\alpha \otimes i)(U)$ est égal à la fonction continue bornée de G dans $\mathcal{A} \otimes L^\infty(G)$

$$t \to U^*(1 \otimes \lambda_G(t)^*)\, U(1 \otimes \lambda_G(t)).$$

Comme $(\alpha \otimes i)(U)$ appartient, à priori, à $\alpha(\mathcal{A}) \otimes L^\infty(G)$, on en déduit, que, pour tout t de G, $U^*(1 \otimes \lambda_G(t)^*)\, U(1 \otimes \lambda_G(t))$ appartient à $\alpha(\mathcal{A})$. Donc, $(\alpha \otimes i)(U)$ appartient à $\mathscr{C}_b(G, \alpha(\mathcal{A}))$, et U à $\mathscr{C}_b(G, \mathcal{A})$.

Ainsi U est une fonction continue bornée de G dans $\mathcal{A}$, à valeurs dans les unitaires de $\mathcal{A}$, $s \to u_s$.

Si on note β l'action continue de G sur $\mathcal{A}$ telle que $\alpha = \beta^g$ (cf. I.3(ii)), la relation (1) devient $\beta_{s^{-1}}(u_t) = u_s{}^* u_{ts}$.

Supposons maintenant que α soit une action à droite de $KA(G)$ sur $\mathcal{A}$. C'est, par définition, une action à gauche de $KA(G)^s$. Mais il est clair que $KA(G)^s = KA(G^0)$, où G^0 désigne le groupe opposé de G (i.e., G muni du produit $s * t = ts$). On peut donc considérer α comme une action à gauche de $KA(G^0)$ et lui appliquer les résultats ci-dessus.

D'autre part, si β' est l'action continue de G^0 sur $\mathcal{A}$ telle que $\beta'^g = \alpha$ et si β est l'action continue de G sur $\mathcal{A}$ telle que $\beta^d = \alpha$, on a, pour tout s de G:

$$\beta_s = \beta'_{s^{-1}} .$$

On voit donc qu'un α-cocycle est une fonction fortement continue de G dans les unitaires de $\mathcal{A}$: $s \to u_s$, qui vérifie

$$\beta_s(u_t) = u_s^* u_{t*s} = u_s^* u_{st} .$$

C'est donc un β-cocycle.

I.8. Proposition. *Soient* $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ *et* $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$ *deux algèbres de Kac,* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *deux algèbres de von Neumann,* Φ *un isomorphisme d'algèbres de von Neumann de* $\mathcal{A}_1$ *sur* $\mathcal{A}_2$, Ψ *un isomorphisme normalisé d'algèbres de Kac de* $\mathbb{K}_1$ *sur* $\mathbb{K}_2$ (*cf.* [2, 4.3.5]), α *une action à droite de* $\mathbb{K}_1$ *sur* $\mathcal{A}_1$, U *un* α*-cocycle.*

Alors, l'application β *définie par*

$$\beta(x) = (\Phi \otimes \Psi)(U\alpha\Phi^{-1}(x)U^*) \qquad (x \in \mathcal{A}_2)$$

est une action à droite de $\mathbb{K}_2$ *sur* $\mathcal{A}_2$.

Démonstration. β est bien un morphisme normal injectif de $\mathcal{A}_2$ dans $\mathcal{A}_2 \otimes M_2$. De plus, on a $\beta(1) = 1$.

Soient x_1 dans $\mathcal{A}_2$, x_2 dans M_2. On a

$$\begin{aligned}(\beta \otimes i)(x_1 \otimes x_2) &= \beta(x_1) \otimes x_2 \\ &= (\Phi \otimes \Psi)(U\alpha\Phi^{-1}(x_1)U^*) \otimes x_2 \\ &= (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[U\alpha\Phi^{-1}(x_1)U^* \otimes \Psi^{-1}(x_2)] \\ &= (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(x_1 \otimes x_2)(U^* \otimes 1)].\end{aligned}$$

Par linéarité et continuité, on en déduit, pour tout y de $\mathcal{A}_2 \otimes M_2$

$$(\beta \otimes i)(y) = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(\Phi \otimes \Psi)^{-1}(y)(U^* \otimes 1)].$$

En particulier, si x appartient à $\mathcal{A}_2$, on a

$$\begin{aligned}&(\beta \otimes i)\, \beta(x) \\ &\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(\Phi \otimes \Psi)^{-1}(\Phi \otimes \Psi)(U\alpha\Phi^{-1}(x)U^*)(U^* \otimes 1)] \\ &\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(U\alpha\Phi^{-1}(x)U^*)(U^* \otimes 1)] \\ &\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha \otimes i)(U)(\alpha \otimes i)\, \alpha\Phi^{-1}(x)(\alpha \otimes i)(U^*)(U^* \otimes 1)].\end{aligned}$$

Comme U est un α-cocycle, cela s'écrit aussi:

$$(\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(i \otimes \Gamma_1)(U)(\alpha \otimes i)\, \alpha\Phi^{-1}(x)(i \otimes \Gamma_1)(U^*)].$$

Mais comme α est une action à droite de $\mathbb{K}_1$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$, cela s'écrit encore:

$$(\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(i \otimes \Gamma_1)(U)(i \otimes \Gamma_1)\, \alpha\Phi^{-1}(x)(i \otimes \Gamma_1)(U^*)].$$

Et on a donc

$$\begin{aligned}(\beta \otimes i)\, \beta(x) &= (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)(i \otimes \Gamma_1)(U\alpha\Phi^{-1}(x)U^*)\\ &= (i \otimes \Gamma_2)(\Phi \otimes \Psi)(U\alpha\Phi^{-1}(x)U^*) \qquad \text{par [2, 4.3.5]}\\ &= (i \otimes \Gamma_2)\, \beta(x).\end{aligned}$$

I.9. Corollaire. *Soient $\mathscr{h}$ un espace hilbertien, $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, U un $I_{\mathbb{K}}^{\mathscr{L}(\mathscr{h})}$-cocycle. Alors*:

(i) *L'application*: $x \to U(x \otimes 1)U^*$ $(x \in \mathscr{L}(\mathscr{h}))$ *est une action à droite de* $\mathbb{K}$ *sur* $\mathscr{L}(\mathscr{h})$;

(ii) *Soit, de plus,* $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ *une sous-algèbre de von Neumann de* $\mathscr{L}(\mathscr{h})$, *telle que*:

$$U(\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathbb{C}_H)U^* \subset \mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(H).$$

Alors, l'application: $x \to U(x \otimes 1)U^*$ $(x \in \mathcal{O}\!\mathcal{l})$ *est une action à droite de* $\mathbb{K}$ *sur* $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$.

On dira que ces actions sont implémentées par U.

I.10. Définitions. Soient α_1 (resp. α_2) une action à droite de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$) sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$ (resp. $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_2$). On dira que α_2 est équivalente à α_1 s'il existe:

un isomorphisme d'algèbres de von Neumann Φ de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_2$,
un isomorphisme normalisé d'algèbres de Kac Ψ de $\mathbb{K}_1$ sur $\mathbb{K}_2$,
un α_1-cocycle U,

tels que:

$$\alpha_2(\Phi(x)) = (\Phi \otimes \Psi)(U\alpha_1(x)U^*) \qquad (x \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}_1).$$

On notera

$$\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U).$$

Si $U = 1$, on dira que α_2 est fortement équivalente à α_1, et on notera $\alpha_2 \approx \alpha_1(\Phi, \Psi)$.

I.11. Théorème. *Les relations $\sim$ et $\approx$ sont des relations d'équivalence.*

Démonstration. On a clairement $\alpha_1 \approx \alpha_1$. Les deux relations sont donc réflexives.

Supposons que $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$.

On va démontrer que $(\Phi \otimes \Psi)(U^*)$ est un α_2-cocycle. En effet:

$$\begin{aligned}(i \otimes \Gamma_2)(\Phi \otimes \Psi)(U^*) &= (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)(i \otimes \Gamma_1)(U^*) \qquad [2, 4.3.5]\\ &= (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(\alpha_1 \otimes i)(U^*)(U^* \otimes 1)]\end{aligned}$$

car U est un α_1-cocycle.

Et donc:

$$\begin{aligned}&(\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)(U \otimes 1)(i \otimes \Gamma_2)(\Phi \otimes \Psi)(U^*)\\ &\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U^*)(U^* \otimes 1)]\\ &\quad = (\alpha_2 \otimes i)(\Phi \otimes \Psi)(U^*).\end{aligned}$$

On a ainsi:

$$(i \otimes \Gamma_2)(\Phi \otimes \Psi)(U^*) = [(\Phi \otimes \Psi)(U^*) \otimes 1](\alpha_2 \otimes i)(\Phi \otimes \Psi)(U^*)$$

et $(\Phi \otimes \Psi)(U^*)$ est donc bien un α_2-cocycle.

D'autre part, si x appartient à $\mathcal{O}\!\!\mathcal{l}_2$, on a:

$$\begin{aligned}(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})[(\Phi \otimes \Psi)(U^*)\,\alpha_2(x)(\Phi \otimes \Psi)(U)] &= U^*(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})\,\alpha_2(x)U\\ &= U^*U\alpha_1\Phi^{-1}(x)\,U^*U\\ &= \alpha_1\Phi^{-1}(x).\end{aligned}$$

On a donc $\alpha_1 \sim \alpha_2(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}, (\Phi \otimes \Psi)(U^*))$.

En particulier, si $\alpha_2 \approx \alpha_1(\Phi, \Psi)$, on a $\alpha_1 \approx \alpha_2(\Phi^{-1}, \Psi^{-1})$. Les deux relations sont donc symétriques. Supposons maintenant que $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$, et $\alpha_3 \sim \alpha_2(\Phi', \Psi', U')$. On va démontrer que $(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U$ est un α_1-cocycle. En effet:

$$\begin{aligned}&(i \otimes \Gamma_1)[(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U]\\ &\quad = [(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(i \otimes \Gamma_2)(U')](i \otimes \Gamma_1)(U)\\ &\qquad \text{par ([2, 4.3.5] appliqué à } \Psi^{-1})\\ &\quad = [(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U' \otimes 1)(\alpha_2 \otimes i)(U')](i \otimes \Gamma_1)(U)\\ &\qquad \text{car } U' \text{ est un } \alpha_2\text{-cocycle}\\ &\quad = [(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U') \otimes 1][(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(\alpha_2 \otimes i)(U')](U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U)\\ &\qquad \text{car } U \text{ est un } \alpha_1\text{-cocycle}\\ &\quad = [(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U') \otimes 1](U \otimes 1)[(\alpha_1 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')]\\ &\qquad \times (U^* \otimes 1)(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U) \qquad \text{par définition de } \alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)\\ &\quad = [(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U \otimes 1](\alpha_1 \otimes i)[(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U]\end{aligned}$$

et $(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U$ est donc bien un α_1-cocycle.

D'autre part, si x appartient à $\mathfrak{A}_1$, on a:

$$\begin{aligned}(\Phi' \circ \Phi \otimes \Psi' \circ \Psi)&[(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')\, U\alpha_1(x)[(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U]^*]\\ &= (\Phi' \otimes \Psi')[U'(\Phi \otimes \Psi)(U\alpha_1(x)U^*)U'^*]\\ &= (\Phi' \otimes \Psi')[U'\alpha_2\Phi(x)U'^*]\\ &= \alpha_3\Phi'\Phi(x).\end{aligned}$$

On a donc $\alpha_3 \sim \alpha_1(\Phi' \circ \Phi, \Psi' \circ \Psi, (\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U)$. En particulier, si $\alpha_2 \approx \alpha_1(\Phi, \Psi)$ et $\alpha_3 \approx \alpha_2(\Phi', \Psi')$, on a $\alpha_3 \approx \alpha_1(\Phi' \circ \Phi, \Psi' \circ \Psi)$. Les deux relations sont donc transitives; d'où le résultat.

Rappelons des formules démontrées dans ce paragraphe, qui seront utiles par la suite

(I.11.1) Si $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$, on a $\alpha_1 \sim \alpha_2(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}, (\Phi \otimes \Psi)(U^*))$.

(I.11.2) Si $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi_1, \Psi, U)$ et $\alpha_3 \sim \alpha_2(\Phi', \Psi', U')$, on a

$$\alpha_3 \sim \alpha_1(\Phi' \circ \Phi, \Psi' \circ \Psi, (\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})(U')U).$$

I.12. *Remarques.* (i) Soient G_1 (resp. G_2) un groupe localement compact, α_1 (resp. α_2) une action à droite de $KA(G_1)$ (resp. $KA(G_2)$) sur l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}_1$ (resp. $\mathfrak{A}_2$).

Supposons que l'on ait $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$. En utilisant [2, Théorème 8.2.9(b)], on voit qu'il existe un isomorphisme j: $G_2 \to G_1$ tel que $\Psi(f)$ $(f \in L^\infty(G_1))$ soit égal à $f \circ j$. Soient β^1 (resp. β^2) l'action continue de G_1 (resp. G_2) sur $\mathfrak{A}_1$ (resp. $\mathfrak{A}_2$) telle que $\beta^{1d} = \alpha_1$ (resp. $\beta^{2d} = \alpha_2$) (cf. I.3(ii)).

Notons $s \to u_s$ le β^1-cocycle associé à U par I.7. Alors la relation $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$ s'écrit

$$\beta_s^2(\Phi(x)) = \Phi(u_{j(s)}\beta^1_{j(s)}(x)\, u^*_{j(s)}) \qquad (x \in \mathfrak{A}_1, s \in G_2).$$

Si $G_1 = G_2$, $j = i$, on retrouve l' "équivalence faible" introduite par Takesaki dans [11, fin du chap. 3].

Si $G_1 = G_2$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, $\Phi = i$, on retrouve l' "équivalence" introduite par Takesaki dans [11, fin du chap. 3].

(ii) Soit G un groupe localement compact, α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$. Soient α^d et α^g les actions à droite et à gauche associées à α. On a

$$\alpha^d \approx \alpha^g(i, \kappa_G{}^a)$$

(car $\kappa_G{}^a$ est un isomorphisme normalisé d'algèbre de Kac de $KA(G)^s$ sur $KA(G)$).

I.13. Proposition. *Soient $\mathfrak{h}$ un espace hilbertien, $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. On utilise les notations de* [2]: *en particulier, W désigne l'opérateur* *fondamental de* $\mathbb{K}$ [2, 2.1.1], *et* $J^\wedge$ *l'involution sur* H *associée au poids* $\varphi^\wedge$ *sur* $M^\wedge$ [2, 2.3.3 *et* 2.3.4]. *Alors*:

(i) *L'opérateur* $1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})$ *est un* $I_{\mathbb{K}}^{\mathscr{L}(\mathscr{k} \otimes H)}$*-cocycle.*

(ii) *Soit* $\mathcal{O}\!\ell$ *une sous-algèbre de von Neumann de* $\mathscr{L}(\mathscr{k})$, α *une action à droite de* $\mathbb{K}$ *sur* $\mathcal{O}\!\ell$. *Alors l'opérateur* $1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})$ *implémente sur* $\alpha(\mathcal{O}\!\ell)$ *une action à droite de* $\mathbb{K}$, *fortement équivalente à* α, *et égale à* $i \otimes \Gamma \mid \alpha(\mathcal{O}\!\ell)$. *Plus précisément, on a* $i \otimes \Gamma \mid \alpha(\mathcal{O}\!\ell) \approx \alpha(\alpha, i)$.

Démonstration. (i) De [2, 3.1.7], on déduit

$$(1 \otimes W^*)(W^* \otimes 1)(1 \otimes W) = (W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma).$$

Si on applique cette formule à l'opérateur fondamental de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}^{\wedge\prime} = \mathbb{K}^{s\wedge}$, on trouve (cf. [9, III.14])

$$\begin{aligned}&[1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})][(\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1][1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})]\\ &\quad = [(\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1](1 \otimes \sigma)[(\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1](1 \otimes \sigma).\end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, l'opérateur $1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J}) \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})$ appartient à $\mathscr{L}(\mathscr{k} \otimes H) \otimes M$, par [2, 2.1.1 et 3.1.5].

En utilisant le lemme I.5(ii), on en déduit

$$\begin{aligned}&(i \otimes \Gamma)(1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))\\ &= (1_{\mathscr{k} \otimes H} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))(1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)\\ &\quad \cdots (1_{\mathscr{k} \otimes H} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))\\ &= 1_{\mathscr{k}} \otimes [(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))((\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)\\ &\quad \cdots (1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))]\\ &= 1_{\mathscr{k}} \otimes [((\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1 \otimes \sigma)((\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1 \otimes \sigma)\\ &\quad \text{en appliquant la formule (1) ci-dessus}\\ &= [(1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})) \otimes 1](1 \otimes \sigma)[(1_{\mathscr{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})) \otimes 1]\\ &\quad \cdots (1 \otimes \sigma) \qquad \text{d'où le résultat (i).}\end{aligned}$$

(ii) Par le lemme I.5(ii), on a, pour x dans $\mathcal{O}\!\ell$

$$\begin{aligned}&(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))(\alpha(x) \otimes 1)(1 \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J}))\\ &\qquad = (i \otimes \Gamma)\, \alpha(x)\\ &\qquad = (\alpha \otimes i)\, \alpha(x) \in \alpha(\mathcal{O}\!\ell) \otimes M.\end{aligned}$$

D'où, en utilisant I.9, les résultats énoncés dans (ii).

I.14. *Remarques.* (i) Si α est une action à gauche de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{O}\!\ell$, il faut remplacer W par $W(\mathbb{K}^s) = (\hat{J} \otimes \hat{J})\, W (\hat{J} \otimes \hat{J})$ (cf. [9, II.14]). Comme $\mathbb{K}^{s\wedge} = K^{\wedge\prime}$, l'involution $\hat{J}$ reste inchangée (par [9, III.1] appliqué au poids $\varphi^\wedge$ sur $M^\wedge$).

Ainsi, on trouve que $1 \otimes \sigma W \sigma$ implimente sur $\alpha(\mathcal{O}\!\ell)$ une action fortement équivalente à α.

(ii) Soit G un groupe localement compact, α une action continue de G sur $\mathcal{O}\!\ell$, α^g l'action à gauche de $KA(G)$ associée par I.3.

En utilisant I.13 et I.14(i), on a, pour x dans $\mathcal{O}\!\ell$,

$$(\alpha^g \otimes i)\, \alpha^g(x) = (1 \otimes \sigma W_G \sigma)\, \alpha^g(x)(1 \otimes W_G{}^* \sigma).$$

Grâce au lemme I.4, on en déduit, pour tout x de $\mathcal{O}\!\ell$, s de G

$$\alpha^g(\alpha_{s^{-1}}(x)) = (1 \otimes \lambda_G(s))^*\, \alpha^g(x)(1 \otimes \lambda_G(s))$$

ou encore

$$\alpha^g(\alpha_s(x)) = (1 \otimes \lambda_G(s))\, \alpha^g(x)(1 \otimes \lambda_G(s)) \qquad \text{(cf. [11, formule 3.2]).}$$

II. Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac selon une action à droite. Action duale

II.1. Définition. Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\ell$, représentée dans un espace hilbertien $\mathscr{h}$.

On appellera produit croisé de $\mathcal{O}\!\ell$ par $\mathbb{K}$ selon l'action à droite α l'algèbre de von Neumann engendrée dans $\mathscr{L}(\mathscr{h} \otimes H)$ par la réunion de $\alpha(\mathcal{O}\!\ell)$ et $\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \hat{M}'$.

On notera cette algèbre $\mathscr{W}^*(\mathcal{O}\!\ell, \mathbb{K}, \alpha)$ ou $\mathscr{W}^*(\alpha)$ pour simplifier.

On a donc $\mathscr{W}^*(\alpha) = (\alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \hat{M}'))''$.

II.2. *Remarques.* (i) Soit α une action à gauche de $\mathbb{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\ell$, représentée dans un espace hilbertien $\mathscr{h}$. C'est une action à droite de $\mathbb{K}^s$ sur $\mathcal{O}\!\ell$. Comme $\mathbb{K}^{s\wedge\prime} = \mathbb{K}^\wedge$ [9, III.14], le produit croisé de $\mathcal{O}\!\ell$ par $\mathbb{K}$ selon l'action à gauche α sera:

$$\mathscr{W}^*(\alpha) = (\alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \hat{M}))''.$$

(ii) Soit G un groupe localement compact, $\mathcal{O}\!\ell$ une algèbre de von Neumann, représentée dans un espace hilbertien $\mathscr{h}$, α une action continue de G sur $\mathcal{O}\!\ell$. Calculons le produit croisé de $\mathcal{O}\!\ell$ par $KA(G)$ selon l'action à gauche α^g, en utilisant la remarque (i) ci-dessus. On a $KA(G)^\wedge = KS(G)$ [2, 8.13 et 8.14) et donc

$$\mathscr{W}^*(\alpha^g) = (\alpha^g(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \mathscr{M}(G)))''.$$

C'est donc le produit croisé $\mathscr{R}(\mathcal{O}\!\ell, \alpha)$ défini par Takesaki en [11, 3.3].

II.3. Proposition. *Soit α_1 (resp. α_2) une action à droite d'une algèbre de Kac*

$\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ (resp. $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$) *sur une algèbre de von Neumann* $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1$ (*resp.* $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_2$) *représentée dans un espace hilbertien* $\mathscr{h}_1$ (*resp.* $\mathscr{h}_2$). *Supposons que les actions* α_1 *et* α_2 *vérifient* $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$. *Alors, on a*:

$$\mathscr{W}^*(\alpha_2) = (\Phi \otimes \overline{\Psi})(U\mathscr{W}^*(\alpha_1)U^*)$$

où $\overline{\Psi}$ *est le prolongement de* Ψ *à* $\mathscr{L}(H_1)$ *défini en* [9, III.13] (*cf.* [11, *Proposition* 3.5]).

Démonstration. On a:

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi})(U\alpha_1(\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1)U^*) = \alpha_2(\mathcal{O}\!\mathcal{l}_2) \subset \mathscr{W}^*(\alpha_2) \tag{1}$$

par définition de la relation $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$ (I.10).

D'autre part on a:

$$\begin{aligned}&(1_{\mathscr{h}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1 \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))(U \otimes 1)(1_{\mathscr{h}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))\\ &\quad = (i \otimes \Gamma_1)(U) \qquad \text{par le lemme I.5(ii)}\\ &\quad = (U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U) \qquad \text{car } U \text{ est un } \alpha_1\text{-cocycle}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&(U \otimes 1)(1_{\mathscr{h}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))(U^* \otimes 1)\\ &\quad = (1_{\mathscr{h}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U)(U^* \otimes 1)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes i)[(U \otimes 1)(1_{\mathscr{h}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))(U^* \otimes 1)]\\ &\quad = (1_{\mathscr{h}_2} \otimes (\overline{\Psi} \otimes i)[(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)])(\alpha_2 \otimes i)(\Phi \otimes i)(U)\end{aligned}$$

par définition de $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$. Comme $(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)$ appartient à $\hat{M}_1' \otimes M_1$ [2, 2.1.5(b) et 3.1.5(a)], on en déduit que

$$(\overline{\Psi} \otimes i)[(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)]$$

appartient à $\hat{M}_2' \otimes M_1$ (par [9, III.13]), et donc que

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes i)[(U \otimes 1)(1_{\mathscr{h}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))(U^* \otimes 1)]$$

appartient à $((\mathbb{C}_{\mathscr{h}_2} \otimes \mathscr{M}_2' \otimes M_1) \cup (\alpha_2(\mathcal{O}\!\mathcal{l}_2) \otimes M_1))''$ c'est à dire à $\mathscr{W}(\alpha_2) \otimes M_1$. Par ailleurs, si x appartient à $\mathscr{L}(H_1)$, on a:

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes i)[(U \otimes 1)(1_{\mathscr{h}_1} \otimes 1 \otimes x)(U^* \otimes 1)] = 1_{\mathscr{h}_2} \otimes 1 \otimes x.$$

Comme

$$\hat{M}_1' \otimes \mathscr{L}(H_1) = (\{(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\} \cup \mathbb{C} \otimes \mathscr{L}(H_1))''$$

par ([9, Lemme IV.1(iii)]) appliqué à $\mathbb{K}_1^{\wedge\prime}$ et III.14). On en déduit:

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes i)[(U \otimes 1)(\mathbb{C}_{\mathscr{k}_1} \otimes \hat{M}_1' \otimes \mathscr{L}(H_1))(U^* \otimes 1)]$$
$$\subset ((\mathscr{W}^*(\alpha_2) \otimes M_1) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{k}_2 \otimes H_2} \otimes \mathscr{L}(H_1)))''$$

soit:

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi})(U(\mathbb{C}_{\mathscr{k}_1} \otimes \hat{M}_1')\, U^*) \otimes \mathscr{L}(H_1) \subset \mathscr{W}^*(\alpha_2) \otimes \mathscr{L}(H_1)$$

et donc

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi})(U(\mathbb{C}_{\mathscr{k}_1} \otimes \hat{M}_1')\, U^*) \subset \mathscr{W}^*(\alpha_2).$$

Grâce à la formule (1) ci-dessus, on en déduit

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi})(U\mathscr{W}^*(\alpha_1)U^*) \subset \mathscr{W}^*(\alpha_2).$$

D'autre part, comme $\alpha_1 \sim \alpha_2(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}, (\Phi \otimes \Psi)(U^*))$ (I.11.1), on a, en appliquant le résultat ci-dessus:

$$(\Phi^{-1} \otimes \overline{\Psi^{-1}})[(\Phi \otimes \Psi)(U^*)\, \mathscr{W}^*(\alpha_2)(\Phi \otimes \Psi)(U)] \subset \mathscr{W}^*(\alpha_1)$$

soit

$$U^*(\Phi^{-1} \otimes \overline{\Psi^{-1}})(\mathscr{W}^*(\alpha_2))\, U \subset \mathscr{W}^*(\alpha_1)$$

ou encore $(\Phi^{-1} \otimes \overline{\Psi^{-1}})(\mathscr{W}^*(\alpha_2)) \subset U\mathscr{W}^*(\alpha_1)U^*$. Comme $\overline{\Psi^{-1}} = \overline{\Psi}^{-1}$ (cf. [9, III.13]), on en déduit le résultat.

II.4. Corollaire. *A isomorphisme près, le produit croisé d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ par une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ selon une action à droite α ne dépend pas de l'espace hilbertien dans lequel $\mathfrak{A}$ est représentée. Plus précisément, si $\alpha_2 \approx \alpha_1(\Phi, i)$, on a alors*

$$\mathscr{W}^*(\alpha_2) = (\Phi \otimes i)(\mathscr{W}^*(\alpha_1))$$

(*cf.* [11, *Proposition* 3.4]).

II.5. *Remarque.* Soit G un groupe localement compact, $KA(G)$ l'algèbre de Kac abélienne associée, $\kappa_G{}^a$ est un isomorphisme normalisé de l'algèbre de Kac $KA(G)$ sur $KA(G)^s$. On vérifie facilement que, pour tout x de $\mathscr{L}(L^2(G))$, on a

$$\overline{\kappa_G{}^a}(x) = J\hat{J}xJ\hat{J}.$$

Soit maintenant une action continue α de G sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ représentée dans un espace hilbertien $\mathscr{k}$. En utilisant I.12(ii) et II.4, on trouve

$$\mathscr{W}^*(\alpha^d) = (1_{\mathscr{k}} \otimes J\hat{J})\, \mathscr{W}^*(\alpha^g)(1_{\mathscr{k}} \otimes J\hat{J}).$$

(Rappelons que $\mathscr{W}^*(\alpha^g)$ est égal au produit croisé $\mathscr{R}(\mathfrak{A}, \alpha)$ étudié dans [11].)

II.6. Proposition. *Soit α une action à droite de l'algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$, représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{h}$.*

(i) *L'opérateur $1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W^*(J\hat{J} \otimes J\hat{J})$ est un $I_{\mathbb{K}^{\wedge\prime}}^{\mathscr{L}(\mathfrak{h}\otimes H)}$-cocycle; il implémente une action à droite de $\mathbb{K}$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha)$, qu'on notera $\alpha^{\sim}$.*

(ii) *$\alpha^{\sim}$ est l'unique morphisme normal de $\mathscr{W}^*(\alpha)$ dans $\mathscr{W}^*(\alpha) \otimes \hat{M}'$, tel que:*

$$\alpha^{\sim}(x) = x \otimes 1 \qquad \forall x \in \alpha(\mathfrak{A}),$$
$$\alpha^{\sim}(1_{\mathfrak{h}} \otimes y) = 1_{\mathfrak{h}} \otimes \hat{\Gamma}'(y) \qquad \forall y \in \hat{M}'.$$

Démonstration. (i) Appliquons I. 13(i) à l'algèbre de Kac $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$: l'opérateur fondamental de $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$ est $(\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})$; d'autre part l'involution de H associée au poids $\varphi^{\wedge\prime\wedge}$ est égale à J (par [9, III.1] appliqué à $\varphi^{\wedge}$). Finalement, l'opérateur $1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W^*(J\hat{J} \otimes J\hat{J})$ est un $I_{\mathbb{K}^{\wedge\prime}}^{\mathscr{L}(\mathfrak{h}\otimes H)}$-cocycle. D'autre part, cet opérateur appartient à $\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \otimes M' \otimes \hat{M}'$ par [2, 2.1.5(b), 3.1.5(a) et 3.3.2]. Donc, si x appartient à $\alpha(\mathfrak{A})$, et donc à $\mathfrak{A} \otimes M$,

$$[1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W^*(J\hat{J} \otimes J\hat{J})](x \otimes 1)[1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W(J\hat{J} \otimes J\hat{J})] = x \otimes 1.$$

Appliquons maintenant le lemme I.5(ii) à l'algèbre de Kac $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$.

Comme plus haut, il concerne l'opérateur $1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W^*(J\hat{J} \otimes J\hat{J})$, qui vérifie donc

$$\begin{aligned}&[1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W^*(J\hat{J} \otimes J\hat{J})](1_{\mathfrak{h}} \otimes y \otimes 1)[1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W(J\hat{J} \otimes J\hat{J})]\\ &\quad = 1_{\mathfrak{h}} \otimes \hat{\Gamma}'(y).\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}&[1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W^*(J\hat{J} \otimes J\hat{J})](\mathscr{W}^*(\alpha) \otimes 1)[1_{\mathfrak{h}} \otimes (J\hat{J} \otimes J\hat{J})\, W(J\hat{J} \otimes J\hat{J})]\\ &\quad \subset ((\alpha(\mathfrak{A}) \otimes \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \otimes \hat{\Gamma}'(\hat{M}')))''\\ &\quad \subset ((\alpha(\mathfrak{A}) \otimes \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \otimes \hat{M}' \otimes \hat{M}'))''\\ &\quad = (\alpha(\mathfrak{A}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \otimes \hat{M}'))'' \otimes \hat{M}'\\ &\quad = \mathscr{W}^*(\alpha) \otimes \hat{M}'.\end{aligned}$$

D'où (i), en appliquant I.9(ii).

(ii) les deux relations ont été vérifiées au cours de la démonstration de (i); l'unicité est trviale.

II.7. Définition. Soit α une action à droite de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$, représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{h}$. L'action à droite $\alpha^{\sim}$ de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$ sur le produit croisé $\mathscr{W}^*(\alpha)$, définie au II.6, sera appelée l'action duale de α.

II.8. PROPOSITION. *Soit α_1 (resp. α_2) une action à droite de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \kappa_1, \varphi_1)$ (resp. $\mathbb{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \kappa_2, \varphi_2)$) sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!l_1$ (resp. $\mathcal{O}\!l_2$), et soit $\alpha_1\tilde{}$ (resp. $\alpha_2\tilde{}$) l'action duale de α_1 (resp. de α_2). Supposons que $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$. Alors, on a:*

$$\tilde{\alpha}_2 \approx \tilde{\alpha}_1(\Phi \otimes \Psi \circ \mathrm{Ad}\, U, \Psi \mid \hat{M}_1').$$

(On a vu en II.3 que $(\Phi \otimes \Psi) \circ \mathrm{Ad}\, U$ est bien un isomorphisme de $\mathscr{W}^*(\alpha_1)$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha_2)$; on sait que $\Psi \mid \hat{M}_1'$ est un isomorphisme normalisé d'algèbre de Kac de $\mathbb{K}_1'$ sur $\mathbb{K}_2'$ (par [9, III.13]) (cf. [11, Proposition 4.2]).

Démonstration. Si x appartient à $\mathcal{O}\!l_1$, on a:

$$\begin{aligned}
&[(\Phi \otimes \Psi) \circ \mathrm{Ad}\, U \otimes \Psi](\alpha_1\tilde{}(\alpha_1(x)))\\
&\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(\alpha_1(x) \otimes 1)(U^* \otimes 1)] \qquad \text{d'après II.6(ii)}\\
&\quad = (\Phi \otimes \Psi)(U\alpha_1(x)U^*) \otimes 1\\
&\quad = \alpha_2(\Phi(x)) \otimes 1 \qquad \text{par définition de } \alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)\\
&\quad = \alpha_2\tilde{}(\alpha_2(\Phi(x))) \qquad \text{par II.6(ii)}\\
&\quad = \alpha_2\tilde{}(\Phi \otimes \Psi)(U\alpha_1(x)U^*) \qquad \text{par définition de } \alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)\\
&\quad = \alpha_2\tilde{}[(\Phi \otimes \Psi) \circ \mathrm{Ad}\, U]\, \alpha_1(x).
\end{aligned}$$

D'autre part, si y appartient à $\hat{M}_1'$, on a

$$\begin{aligned}
&[(\Phi \otimes \Psi) \circ \mathrm{Ad}\, U \otimes \Psi]\, \alpha_1\tilde{}(1_{\mathfrak{h}_1} \otimes y)\\
&\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \Psi)[(U \otimes 1)(1_{\mathfrak{h}_1} \otimes \hat{\Gamma}_1'(y))(U^* \otimes 1)] \qquad \text{par II.6(ii)}\\
&\quad = [(\Phi \otimes \Psi)(U) \otimes 1][1_{\mathfrak{h}_2} \otimes \hat{\Gamma}_2'(\Psi(y))][(\Phi \otimes \Psi)(U^*) \otimes 1] \quad \text{par [2, 4.3.5]}.
\end{aligned}$$

Mais, par II.6, on a:

$$\begin{aligned}
1_{\mathfrak{h}_2} \otimes \hat{\Gamma}_2'(\Psi(y)) &= \alpha_2\tilde{}(1_{\mathfrak{h}_2} \otimes \Psi(y))\\
&= [1_{\mathfrak{h}_2} \otimes (J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)\, W_2^*(J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)](1_{\mathfrak{h}_2} \otimes \Psi(y) \otimes 1)\\
&\quad \cdots [1_{\mathfrak{h}_2} \otimes (J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)\, W_2(J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)].
\end{aligned}$$

Comme $(\Phi \otimes \Psi)(U)$ appartient à $\mathcal{O}\!l_2 \otimes M_2$, et $(J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)\, W_2(J_2J_2 \otimes J_2\hat{J}_2)$ à $M_2' \otimes \hat{M}_2'$, on en déduit:

$$\begin{aligned}
&[(\Phi \otimes \Psi) \circ \mathrm{Ad}\, U \otimes \Psi]\, \alpha_1\tilde{}(1_{\mathfrak{h}_1} \otimes y)\\
&\quad = [1_{\mathfrak{h}_2} \otimes (J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)\, W_2^*(J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)][(\Phi \otimes \Psi)(U) \otimes 1](1_{\mathfrak{h}_2} \otimes \Psi(y) \otimes 1)\\
&\qquad \cdots [(\Phi \otimes \Psi)(U^*) \otimes 1][1_{\mathfrak{h}_2} \otimes (J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)\, W_2(J_2\hat{J}_2 \otimes J_2\hat{J}_2)]\\
&\quad = \alpha_2\tilde{}(\Phi \otimes \Psi)[U(1_{\mathfrak{h}_1} \otimes y^*]\\
&\quad = \alpha_2\tilde{}(\Phi \otimes \Psi)\, \mathrm{Ad}\, U(1_{\mathfrak{h}_1} \otimes y).
\end{aligned}$$

Donc, par linéarité et continuité, pour tout x de $\mathscr{W}^*(\alpha_1)$, on a:

$$[(\Phi \otimes \overline{\Psi}) \operatorname{Ad} U \otimes \overline{\Psi}]\, \alpha_1{}^{\sim}(x) = \alpha_2{}^{\sim}(\Phi \otimes \overline{\Psi}) \operatorname{Ad} U(x).$$

II.9. Corollaires. (i) *A isomorphisme près, l'action duale $\alpha^{\sim}$ d'une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, ne dépend pas de l'espace hilbertien sur lequel $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ est représentée. Plus précisément, si $\alpha_2 \approx \alpha_1(\Phi, i)$, on a alors:*

$$\alpha_2{}^{\sim} \approx \alpha_1{}^{\sim}(\Phi \otimes i, i).$$

(ii) *Soient G un groupe localement compact, α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, α^d et α^g les actions de $KA(G)$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ construits en* I.3. *On a*

$$\alpha^{d\sim} \approx \alpha^{g\sim}(i \otimes \operatorname{Ad} J\hat{J}, \operatorname{Ad} J\hat{J}\,|_{\mathscr{M}(G)})$$

(*se démontre par* I.12(ii) *et* II.5).

II.10. *Remarques.* (i) Soient G un groupe localement compact, α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ représentée dans un espace hilbertien $\mathscr{h}$. Comme $\mathbb{K}^{s\wedge\prime} = \mathbb{K}^{\wedge}$ [9, III.14], l'action duale de α^g est une action à droite de $KA(G)^{\wedge} = KS(G)$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha^g)$. En utilisant II.6(ii), on voit que $\alpha^{g\sim}$ n'est autre que le morphisme normal injectif δ introduit dans [6, Theorem 1].

(ii) Reprenons les mêmes données et notations, mais supposons, de plus, le groupe G commutatif. Soient $G^{\wedge}$ le groupe dual de G, $\mathscr{F}$ l'opérateur de Fourier–Plancherel: $L^2(G) \to L^2(G^{\wedge})$. Par [2, 8.3.3], $\operatorname{Ad} \mathscr{F} \mid \mathscr{M}(G)$ est un isomorphisme normalisé d'algèbres de Kac de $KS(G)$ sur $KA(G^{\wedge})$. Par I.8 et la remarque (i) ci-dessus, il existe une action β à droite de $KA(G^{\wedge})$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha^g)$, telle que

$$\beta \approx \alpha^{g\sim}(i, \operatorname{Ad} \mathscr{F} \mid \mathscr{M}(G)).$$

En utilisant II.6, on trouve facilement

$$\beta(\alpha^g(x)) = \alpha^g(x) \otimes 1 \qquad (x \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}),$$
$$\beta(1_{\mathscr{h}} \otimes \lambda_G(s)) = 1_{\mathscr{h}} \otimes \lambda_G(s) \otimes \mathscr{F}\lambda_G(s)\,\mathscr{F}^* \qquad (s \in G).$$

Par la proposition I.3(ii), il existe une action continue $\alpha^{\wedge}$ de $G^{\wedge}$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha^g)$, telle que $\alpha^{\wedge d} = \beta$. On voit que:

$$\alpha_\theta{}^{\wedge}(\alpha^g(x)) = \alpha^g(x) \qquad (x \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}, \theta \in G^{\wedge}),$$
$$\alpha_\theta{}^{\wedge}(1_{\mathscr{h}} \otimes \lambda_G(t)) = \langle t, \theta\rangle^{-}(1_{\mathscr{h}} \otimes \lambda_G(t)) \qquad (t \in G, \theta \in G^{\wedge}).$$

On retrouve [11, 4.1].

III. Double produit croisé

III.1. Proposition. *Soit* α *une action à droite d'une algèbre de Kac* $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ *sur une algèbre de von Neumann* $\mathcal{O}\!\ell$, *représentée dans un espace hilbertien* $\mathscr{h}$. *Soit* $\alpha^{\sim}$ *l'action duale de* α, *définie en* II.7. *Le produit croisé* $\mathscr{W}^*(\alpha^{\sim})$ *est isomorphe à l'algèbre de von Neumann* $(\alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup \mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \mathscr{L}(H))''$. *Plus précisément, si on appelle* Θ *l'automorphisme de* $\mathscr{L}(\mathscr{h} \otimes H \otimes H)$ *implémenté par* $1_{\mathscr{h}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})$, *on a:*

$$\mathscr{W}^*(\alpha^{\sim}) = \Theta \circ (\alpha \otimes i)[(\alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \mathscr{L}(H)))''].$$

Démonstration. L'action $\alpha^{\sim}$ est une action à droite de $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$ sur l'algèbre de von Neumann $\mathscr{W}^*(\alpha)$, représentée dans $\mathscr{h} \otimes H$. Comme $\mathbb{K}^{\wedge\prime\wedge\prime} = \mathbb{K}'^{s}$ [9, III.14] le produit croisé de $\mathscr{W}^*(\alpha)$ par $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$ selon l'action à droite $\alpha^{\sim}$ est, d'après II.1

$$\mathscr{W}^*(\alpha^{\sim}) = (\alpha^{\sim}(\mathscr{W}^*(\alpha)) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes M'))''$$

ou encore, en utilisant II.6

$$\mathscr{W}^*(\alpha^{\sim}) = ((\alpha(\mathcal{O}\!\ell) \otimes \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \hat{\Gamma}'(\hat{M}')) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes M'))''.$$

Calculons $\Theta^{-1}(\mathscr{W}^*(\alpha^{\sim}))$: si x appartient à $\mathcal{O}\!\ell$, $\alpha(x)$ appartient à $\mathcal{O}\!\ell \otimes M$, et on a

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}(\alpha(x) \otimes 1) &= (i \otimes \Gamma)\, \alpha(x) \qquad \text{par I.5(ii)} \\ &= (\alpha \otimes i)\, \alpha(x) \end{aligned}$$

si y appartient à $\hat{M}'$, on a

$$\hat{\Gamma}'(y) = (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W^* \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})(1 \otimes y)(\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})$$

par ([2, 2.2.5(b)] appliqué à $\mathbb{K}^{\wedge\prime}$ et [9, III.14]) et donc

$$\Theta^{-1}(1_{\mathscr{h}} \otimes \hat{\Gamma}'(y)) = 1_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes y.$$

Enfin, comme $1_{\mathscr{h}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\, \sigma W \sigma (\hat{J} \otimes \hat{J})$ appartient à $\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \hat{M}' \otimes M$ par [2, 2.1.1 et 3.1.5], on aura, pour tout z de M'

$$\Theta^{-1}(1_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes z) = 1_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes z$$

et donc

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}(\mathscr{W}^*(\alpha^{\sim})) &= ((\alpha \otimes i)\, \alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes \hat{M}') \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes M'))'' \\ &= ((\alpha \otimes i)\, \alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes (\hat{M}' \cup M')''))'' \\ &= ((\alpha \otimes i)\, \alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h} \otimes H} \otimes \mathscr{L}(H)))'' \qquad \text{par [9, IV.3]} \\ &= (\alpha \otimes i)[(\alpha(\mathcal{O}\!\ell) \cup (\mathbb{C}_{\mathscr{h}} \otimes \mathscr{L}(H)))''] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

III.2. DÉFINITION. Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$. Nous dirons que α vérifie la propriété A si

$$(\alpha(\mathfrak{A}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \otimes \mathscr{L}(H)))'' = \mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H).$$

On déduit trivialement de III.1 et III.2:

III.3. PROPOSITION. *Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$. Les propositions ci-dessous sont équivalentes*:

(i) *α possède la propriété A,*

(ii) *$\Theta(\alpha \otimes i)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H)$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha^\sim)$.*

III.4. LEMME. *Soit $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. On a*

$$(\Gamma(M) \cup (M \otimes C))'' = M \otimes M.$$

Démonstration. Soit $N = (\Gamma(M) \cup (M \otimes C))''$. Par [2, 4.2.5(c)], N est une sous-algèbre de von Neumann de $M \otimes M$ invariante par $\sigma_t^{\varphi \otimes \varphi}$. De plus, si x, y appartiennent à $\mathfrak{N}_\varphi$, $\Gamma(y)(x \otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi \otimes \varphi} \cap N$ (par [2, 1.3.1 axiome K(iii)]). On en déduit facilement que la restriction de $\varphi \otimes \varphi$ à N est semi-finie. Donc, par [10, Théorème, p. 309], il existe une espérance conditionnelle normale fidèle E de $M \otimes M$ sur N. Si P est le projecteur de $H_{\varphi \otimes \varphi}$ sur $\Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(N \cap \mathfrak{N}_{\varphi \otimes \varphi})^-$, E est donné de la façon suivante: Pour tout x de $M \otimes M$, Ex est l'unique élément de N tel que $(Ex)P = PxP$ [10, p. 315, formula (10)].

Mais l'adhérence de $\Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(N \cap \mathfrak{N}_{\varphi \otimes \varphi})$ contient le sous-espace fermé engendré par les $\Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(y)(x \otimes 1))$ $(x, y \in \mathfrak{N}_\varphi)$. Et, par [2, 2.1.1], on a $\Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(y)(x \otimes 1)) = W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y))$. Comme W est unitaire (2.2.4), on en déduit que $P = 1$; donc $E = i$ et $N = M \otimes M$.

III.5. PROPOSITION. (i) *Toute action d'une algèbre de Kac abélienne possède la propriété A*

(ii) *Pour toute algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$, et tout algèbre de Kac $\mathbb{K}$, l'action triviale $I_{\mathbb{K}}{}^{\mathfrak{A}}$ possède la propriété A;*

(iii) *L'action Γ de l'algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur l'algèbre de von Neumann M possède la propriété A;*

(iv) *Pour toute action α, l'action duale $\alpha^\sim$ possède la propriété A.*

Démonstration. (i) On a $\alpha(\mathfrak{A})' \cap \mathscr{L}(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{A}' \otimes C$ [6, Proposition 2.2], d'où le résultat

(ii) trivial;

(iii) Appliquons III.4 à l'algèbre de Kac $\mathbb{K}^s$. On trouve

$$(\Gamma(M) \cup (\mathbb{C} \otimes M))'' = M \otimes M;$$

et donc

$$\begin{aligned}(\Gamma(M) \cup (\mathbb{C} \otimes \mathscr{L}(H)))'' &= (\Gamma(M) \cup (\mathbb{C} \otimes M) \cup \mathbb{C} \otimes \mathscr{L}(H))'' \\ &= ((M \otimes M) \cup (\mathbb{C} \otimes \mathscr{L}(H)))'' \\ &= M \otimes \mathscr{L}(H);\end{aligned}$$

(iv) On a

$$\begin{aligned}&(\alpha^{\sim}(\mathscr{W}^*(\alpha)) \cup \mathbb{C}_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \mathscr{L}(H))'' \\ &\quad = ((\alpha(\mathfrak{A}) \otimes \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{k}} \otimes \hat{\Gamma}'(\hat{M}')) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \mathscr{L}(H)))'' \qquad \text{par II.6} \\ &\quad = ((\alpha(\mathfrak{A}) \otimes \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{k}} \otimes (\hat{\Gamma}'(\hat{M}') \cup (\mathbb{C} \otimes \mathscr{L}(H)))''))'' \\ &\quad = ((\alpha(\mathfrak{A}) \otimes \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C}_{\mathfrak{k}} \otimes \hat{M}' \otimes \mathscr{L}(H)))'' \qquad \text{par III.5(iii) appliqué à } \mathbb{K}^{\wedge\prime} \\ &\quad = \mathscr{W}^*(\alpha) \otimes \mathscr{L}(H).\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que la propriété A est stable par équivalence (III.10).

III.6. PROPOSITION. *Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{k}$. Alors*

(i) *$(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i)$ est une action à droite de $\mathbb{K}$ sur $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H)$,*

(ii) *L'opérateur $1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma$ est un $(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i)$-cocycle.*

Démonstration. (i) $(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i)$ est un morphisme normal de $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H)$ dans $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H) \otimes M$; on a bien $(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i)(1) = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned}&[(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i) \otimes i](i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i) \\ &\quad = (i \otimes \varsigma \otimes i)(\alpha \otimes i \otimes i)(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i) \\ &\quad = (i \otimes \varsigma \otimes i)(i \otimes i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i \otimes i)(\alpha \otimes i) \\ &\quad = (i \otimes \varsigma \otimes i)(i \otimes i \otimes \varsigma)(i \otimes \Gamma \otimes i)(\alpha \otimes i).\end{aligned}$$

Mais, si a, b, c appartiennent à $\mathscr{L}(H)$, on a

$$(\varsigma \otimes i)(i \otimes \varsigma)(a \otimes b \otimes c) = c \otimes a \otimes b.$$

Par linéarité et continuité, on en déduit que si $x \in M$, $y \in \mathscr{L}(H)$

$$(\varsigma \otimes i)(i \otimes \varsigma)(\Gamma(x) \otimes y) = y \otimes \Gamma(x).$$

On en déduit $(\varsigma \otimes i)(i \otimes \varsigma)(\Gamma \otimes i) = (i \otimes \Gamma)\varsigma$ et donc

$$(i \otimes \varsigma \otimes i)(i \otimes i \otimes \varsigma)(i \otimes \Gamma \otimes i)(\alpha \otimes i) = (i \otimes i \otimes \Gamma)(i \otimes \varsigma)(\alpha \otimes i)$$

d'où le résultat

(ii) $1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma$ est un unitaire de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(H) \otimes M$ [2, 2.1.1 et 2.2.4]. De plus, par le lemme I.5(iii)

$$\begin{aligned}
&(i \otimes \Gamma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma) \\
&\quad = (1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes W)(1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma \otimes 1)(1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes W^*) \\
&\quad = 1_{\mathfrak{k}} \otimes (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(\sigma W^* \sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes W^*) \\
&\quad = 1_{\mathfrak{k}} \otimes (1 \otimes \sigma)(1 \otimes \sigma W \sigma)(\sigma W^* \sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma W^* \sigma)(1 \otimes \sigma) \\
&\quad = 1_{\mathfrak{k}} \otimes (\sigma W^* \sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(\sigma W^* \sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par ([2, 3.1.7] appliqué à } \mathbb{K}\hat{\ } \text{ et 4.I.4)} \\
&\quad = (1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma \otimes 1)(1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma \otimes 1)(1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes \sigma) \\
&\quad = (1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma \otimes 1)[(i \otimes s)(\alpha \otimes i) \otimes i](1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^* \sigma).
\end{aligned}$$

Lemme III.7. *Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{k}$. On suppose que l'action α possède la propriété A. Alors*:

(i) *il existe une unique action β à droite de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(H)$, telle que*

$$\alpha^{\sim\sim} \approx \beta(\Theta(\alpha \otimes i), v)$$

(*par* III.3, *$\Theta(\alpha \otimes i)$ est un isomorphisme de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(H)$ sur $\mathcal{W}^*(\alpha^\sim)$; v est l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}'^s$ défini en* [9, III.12];

(ii) *De plus, β vérifie, pour tout x de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(H)$*

$$(\alpha \otimes i \otimes i)\,\beta(x) = \mathrm{Ad}(1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes \sigma W^* \sigma)(i \otimes s)(\Theta^{-1} \otimes i)(i \otimes s)((\alpha \otimes i)(x) \otimes 1).$$

Démonstration. (i) L'action $\alpha^{\sim\sim}$ est, par définition (II.6), une action à droite de $\mathbb{K}^{\wedge\prime\wedge\prime}$, ($=\mathbb{K}'^s$ par [9, III.14]) sur $\mathcal{W}^*(\alpha^\sim)$. Le résultat est donc une simple application de I.8, grâce à III.3, et [9, III.12].

(ii) En appliquant II.6 à l'action $\alpha^\sim$ de $K^{\wedge\prime}$ sur l'algèbre $\mathcal{W}^*(\alpha)$ représentée dans l'espace hilbertien $\mathfrak{k} \otimes H$, on sait que, par définition, l'action $\alpha^{\sim\sim}$ sera implementée par l'opérateur

$$1_{\mathfrak{k} \otimes H} \otimes (J \otimes J)\, \sigma W \sigma (J \otimes J).$$

En effet $W(\mathbb{K}^{\wedge\prime}) = (J^\wedge \otimes J^\wedge)\, \sigma W^* \sigma (J^\wedge \otimes J^\wedge)$; de plus, il faut remplacer J par l'involution associée au poids $\varphi^{\wedge\prime}$, c'est-à-dire par $J^\wedge$ (par [9, III.1] appliqué à $\varphi^\wedge$), et $J^\wedge$ par l'involution associée au poids $\varphi^{\wedge\prime\wedge}$ (c'est-à-dire J, par [9, III.1] appliqué à $\varphi^\wedge$).

On en déduit donc, que, par définition de β, pour tout x de $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H)$

$$
\begin{aligned}
\text{(III.7.1)}\quad (\alpha \otimes i \otimes i)\,\beta(x) &= (\Theta^{-1} \otimes v)\,\alpha^{\sim\sim}\Theta(\alpha \otimes i)(x) \\
&= (1_{\mathscr{H}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes J\hat{J})(1_{\mathscr{H}\otimes H} \otimes (J \otimes J)\,\sigma W\sigma(J \otimes J)) \\
&\quad \cdots (1_{\mathscr{H}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)((\alpha \otimes i)(x) \otimes 1) \\
&\quad \cdots (1_{\mathscr{H}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1) \\
&\quad \cdots (1_{\mathscr{H}\otimes H} \otimes (J \otimes J)\,\sigma W\sigma(J \otimes J))(1_{\mathscr{H}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes \hat{J}\hat{J}).
\end{aligned}
$$

Calculons:

$$
\begin{aligned}
&[(\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes J\hat{J}][1 \otimes (J \otimes J)\,\sigma W\sigma(J \otimes J)] \\
&\quad \cdots [(\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes J\hat{J}].
\end{aligned}
$$

Grâce à [2, 3.1.5(b)] cela vaut:

$$
\begin{aligned}
&[(J\hat{J} \otimes 1)\,\sigma W^*\sigma(J\hat{J} \otimes 1) \otimes J\hat{J}][1 \otimes (1 \otimes J\hat{J})\,\sigma W^*\sigma(1 \otimes J\hat{J})] \\
&\quad \cdots [(J\hat{J} \otimes 1)\,\sigma W\sigma(J\hat{J} \otimes 1)) \otimes J\hat{J}]
\end{aligned}
$$

ou encore:

$$
\begin{aligned}
&(J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1)(\sigma W^*\sigma \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes J\hat{J})(1 \otimes 1 \otimes J\hat{J})(1 \otimes \sigma W^*\sigma)(1 \otimes 1 \otimes J\hat{J}) \\
&\quad \cdots (J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1)(\sigma W\sigma \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes J\hat{J})
\end{aligned}
$$

soit:

$$
\begin{aligned}
&(J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1)(\sigma W^*\sigma \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \sigma W^*\sigma)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes J\hat{J}) \\
&\quad \cdots (\sigma W\sigma \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes J\hat{J})
\end{aligned}
$$

ou encore:

$$(J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1)(\sigma W^*\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma W^*\sigma)(\sigma W\sigma \otimes 1)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1).$$

De [2, 3.1.7], on déduit la relation:

$$(W \otimes 1)(1 \otimes W)(W^* \otimes 1) = (1 \otimes W)(1 \otimes \sigma)(W \otimes 1)(1 \otimes \sigma)$$

et si on applique cette formule à $W^\wedge = \sigma W^*\sigma$ [2, 4.I.4(a)], on a:

$$(\sigma W^*\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma W^*\sigma)(\sigma W\sigma \otimes 1) = (1 \otimes \sigma W^*\sigma)(1 \otimes \sigma)(\sigma W^*\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)$$

et on a donc, grâce à cela:

$$
\begin{aligned}
&[(\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes J\hat{J}][1 \otimes (J \otimes J)\sigma W\sigma(J \otimes J)][(\hat{J} \otimes \hat{J})\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes J\hat{J} \\
&\quad = (J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \sigma W^*\sigma)(1 \otimes \sigma)(\sigma W^*\sigma \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(J\hat{J} \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = (1 \otimes \sigma W^*\sigma)(1 \otimes \sigma)[(J\hat{J} \otimes 1)\,\sigma W^*\sigma(J\hat{J} \otimes 1) \otimes 1](1 \otimes \sigma) \\
&\quad = (1 \otimes \sigma W^*\sigma)(1 \otimes \sigma)[(\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1](1 \otimes \sigma) \qquad \text{(par [2, 3.I.5(b)].}
\end{aligned}
$$

Et donc, si on revient à la formule (III.7.1), on a, pour tout x de $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned}(\text{III.7.2})\quad &(\alpha \otimes i \otimes i)\,\beta(x)\\ &= (1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma W^*\sigma)(1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma),\\ &\quad\cdots [(\alpha \otimes i)(x) \otimes 1](1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)\\ &\quad\cdots (1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma W^*\sigma)\end{aligned}$$

d'où (ii)

III.8. Théorème. *Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, représentée dans un espace hilbertien $\mathfrak{k}$. On suppose que l'action α possède la propriété A. Alors, on a*

$$\alpha^{\sim\sim} \sim (i \otimes s)(\alpha \otimes i) \qquad (\Theta(\alpha \otimes i), v, 1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^*\sigma).$$

(On a vu en III.6 que $(i \otimes s)(\alpha \otimes i)$ est une action à droite de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathcal{L}(H)$, que $1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^*\sigma$ est un $(i \otimes s)(\alpha \otimes i)$-cocycle, et en III.3 que $\Theta(\alpha \otimes i)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathcal{L}(H)$ sur $\mathcal{W}^*(\alpha^\sim)$; v est l'isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}'^s$ défini en [9, III.12].) (Ceci généralise [11, 4.7; 7, 7.1].)

Démonstration. Reprenons les notations de III.7; soient x dans $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, y dans $\mathcal{L}(H)$. On a:

$$\begin{aligned}(\Theta^{-1} \otimes i)(i \otimes s)[(\alpha \otimes i)(x \otimes y) \otimes 1] &= (\Theta^{-1} \otimes i)(\alpha(x) \otimes 1 \otimes y)\\ &= \Theta^{-1}(\alpha(x) \otimes 1) \otimes y\\ &= (1_{\mathfrak{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}))(\alpha(x) \otimes 1)(1_{\mathfrak{k}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J})) \otimes y\\ &= (i \otimes \Gamma)\,\alpha(x) \otimes y \qquad \text{par I.5(ii)}\\ &= (\alpha \otimes i)\,\alpha(x) \otimes y\\ &= (\alpha \otimes i \otimes i)(\alpha \otimes i)(x \otimes y).\end{aligned}$$

Par linéarité et continuité, on en déduit, pour tout x de $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathcal{L}(H)$

$$(\Theta^{-1} \otimes i)(i \otimes s)[(\alpha \otimes i)(x) \otimes 1] = (\alpha \otimes i \otimes i)(\alpha \otimes i)(x).$$

Et donc, par III.7(ii)

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes i \otimes i)\,\beta(x) &= (1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma W^*\sigma)(1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma)[(\alpha \otimes i \otimes i)(\alpha \otimes i)(x)]\\ &\quad\cdots (1_{\mathfrak{k}\otimes H} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W\sigma)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes i \otimes i)\,\beta(x) &= (\alpha \otimes i \otimes i)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^*\sigma)(\alpha \otimes i \otimes i)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma)(\alpha \otimes i \otimes i)\\ &\quad\cdots (\alpha \otimes i)(x)(\alpha \otimes i \otimes i)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma)(\alpha \otimes i \otimes i)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W\sigma).\end{aligned}$$

On a donc, pour tout x dans $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned}\beta(x) &= (1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^*\sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma)(\alpha \otimes i)(x)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W\sigma)\\ &= (1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W^*\sigma)[(i \otimes s)(\alpha \otimes i)(x)](1_{\mathfrak{k}} \otimes \sigma W\sigma).\end{aligned}$$

On a vu en III.6(ii) que $1_{\mathscr{k}} \otimes \sigma W^*\sigma$ est un $(i \otimes s)(\alpha \otimes i)$-cocycle. On en déduit donc

$$\beta \sim (i \otimes s)(\alpha \otimes i) \qquad (i, i, 1_{\mathscr{k}} \otimes \sigma W^*\sigma)$$

d'où le résultat, par III.7(i) et I.II.1.

LEMME III.9. *Soient α_1 (resp. α_2) une action à droite de $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$) sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\ell_1$ (resp. $\mathcal{O}\!\ell_2$). On suppose que*

$$\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U).$$

On a alors, pour tout x dans $\mathcal{O}\!\ell_2 \otimes \mathscr{L}(H_2)$

$$(\alpha_2 \otimes i)(x) = (\Phi \otimes \Psi \otimes \boldsymbol{\Psi})[(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \boldsymbol{\Psi}^{-1})(x)(U^* \otimes 1)].$$

Démonstration. Soient x_1 dans $\mathcal{O}\!\ell_2$, x_2 dans $\mathscr{L}(H_2)$. On a:

$$\begin{aligned}
&(\Phi \otimes \Psi \otimes \boldsymbol{\Psi})[(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \boldsymbol{\Psi}^{-1})(x_1 \otimes x_2)(U^* \otimes 1)]\\
&\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \boldsymbol{\Psi})[(U \otimes 1)[\alpha_1\Phi^{-1}(x_1) \otimes \boldsymbol{\Psi}^{-1}(x_2)](U^* \otimes 1)]\\
&\quad = (\Phi \otimes \Psi \otimes \boldsymbol{\Psi})[U\alpha_1\Phi^{-1}(x_1)\, U^* \otimes \boldsymbol{\Psi}^{-1}(x_2)]\\
&\quad = (\Phi \otimes \Psi)(U\alpha_1\Phi^{-1}(x_1)U^*) \otimes x_2\\
&\quad = \alpha_2(x_1) \otimes x_2 \qquad \text{par définition de } \alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)\\
&\quad = (\alpha_2 \otimes i)(x_1 \otimes x_2)
\end{aligned}$$

d'où le résultat par linéarité et continuité.

COROLLAIRE III.10. *Soit α_1 (resp. α_2) une action à droite de $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$) sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\ell_1$ (resp. $\mathcal{O}\!\ell_2$). On suppose que α_1 possède la propriété A définie en* III.2, *et que α_2 est équivalente à α_1 . Alors α_2 possède aussi la propriété A.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{O}\!\ell_1$ (resp. $\mathcal{O}\!\ell_2$) représentée dans l'espace hilbertien $\mathscr{k}_1$ (resp. $\mathscr{k}_2$). Supposons $\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U)$. La proposition II.8, appliquée deux fois, nous indique que

$$\alpha_2^{\sim\sim} \approx \alpha_1^{\sim\sim}(\Phi \otimes \boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\Psi} \circ \mathrm{Ad}(U \otimes 1), \boldsymbol{\Psi} \mid \mathbb{K}_1'^s);$$

On sait que $\boldsymbol{\Psi} \mid \mathbb{K}_1'^s$ est un isomorphisme normalisé de $\mathbb{K}_1'^s$ sur $\mathbb{K}_2'^s$ [9, III.13]; Par le théorème III.8, on a:

$$\alpha_1^{\sim\sim} \sim (i \otimes s)(\alpha_1 \otimes i)(\Theta_1 \circ (\alpha_1 \otimes i), v_1 , 1_{\mathscr{k}_1} \otimes \sigma W_1{}^*\sigma).$$

(On notera Θ_i $(i = 1, 2)$ l'automorphisme de $\mathscr{L}(\mathscr{k}_i \otimes H_i \otimes H_i)$ associé à α_i et défini en III.1, et v_i l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}_i$ sur $\mathbb{K}_i'^s$.) D'autre part, il est facile de voir que

$$(i \otimes s)(\alpha_2 \otimes i) \sim (i \otimes s)(\alpha_1 \otimes i)(\Phi \otimes \boldsymbol{\Psi}, \Psi, (i \otimes s)(U)).$$

On a donc, par (I.11.1)

$$(i \otimes s)(\alpha_1 \otimes i) \sim (i \otimes s)(\alpha_2 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \overline{\Psi}^{-1}, \Psi^{-1}, (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})(i \otimes s)(U)).$$

Par transitivité, on en déduit que $\alpha_2^{\sim\sim}$ est équivalente à $(i \otimes s)(\alpha_2 \otimes i)$. Plus précisément, par I.11.2, on peut construire un isomorphisme entre $\mathcal{O}\!\ell_2 \otimes \mathscr{L}(H_2)$ et $\mathscr{W}^*(\alpha_2^{\sim})$: il s'agit de

$$\mathscr{J} = (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \mathrm{Ad}(U \otimes 1) \circ \Theta_1 \circ (\alpha_1 \otimes i) \circ (\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1}).$$

Mais comme U est un α_1-cocycle, on a:

$$\begin{aligned}(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U) &= (i \otimes \Gamma_1)(U)\\ &= (1_{\mathscr{k}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1 \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1))(U \otimes 1)\\ &\qquad \cdots (1_{\mathscr{k}_1} \otimes (\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1{}^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)) \qquad \text{par I.5(ii)}\\ &= \Theta_1^{-1}(U \otimes 1).\end{aligned}$$

On a donc:

$$\mathscr{J} = (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \Theta_1 \circ \mathrm{Ad}((U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U)) \circ (\alpha_1 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1}).$$

D'autre part, on a:

$$(\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})((\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)\, \sigma W_1{}^* \sigma(\hat{J}_1 \otimes \hat{J}_1)) = (\hat{J}_2 \otimes \hat{J}_2)\, \sigma W_2{}^* \sigma(\hat{J}_2 \otimes \hat{J}_2)$$

(par [2, 5.4.1(d); 9, III.13.2]).

On en déduit $(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \Theta_1 = \Theta_2 \circ (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})$. On a donc:

$$\begin{aligned}\mathscr{J} &= \Theta_2 \circ (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \mathrm{Ad}((U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U)) \circ (\alpha_1 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})\\ &= \Theta_2 \circ (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \mathrm{Ad}((U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U)(U^* \otimes 1))\\ &\qquad \cdots \circ \mathrm{Ad}(U \otimes 1) \circ (\alpha_1 \otimes i)(\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1})\\ &= \Theta_2 \circ \mathrm{Ad}(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})[(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U^* \otimes 1)]\\ &\qquad \cdots \circ (\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \mathrm{Ad}(U \otimes 1) \circ (\alpha_1 \otimes i) \circ (\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1}).\end{aligned}$$

Par le lemme III.9, on trouve

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})[(U \otimes 1)(\alpha_1 \otimes i)(U)(U^* \otimes 1)] = (\alpha_2 \otimes i)(\Phi \otimes \Psi)(U)$$

et

$$(\Phi \otimes \overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi}) \circ \mathrm{Ad}(U \otimes 1) \circ (\alpha_1 \otimes i) \circ (\Phi^{-1} \otimes \Psi^{-1}) = \alpha_2 \otimes i.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\mathscr{J} &= \Theta_2 \circ \mathrm{Ad}[(\alpha_2 \otimes i)(\Phi \otimes \Psi)(U)] \circ (\alpha_2 \otimes i)\\ &= \Theta_2 \circ (\alpha_2 \otimes i) \circ \mathrm{Ad}(\Phi \otimes \Psi)(U).\end{aligned}$$

Comme $(\Phi \otimes \Psi)(U)$ appartient à $\mathcal{O}\!\ell_2 \otimes \mathscr{L}(H_2)$, on en déduit que $\Theta_2 \circ (\alpha_2 \otimes i)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}\!\ell_2 \otimes \mathscr{L}(H_2)$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha_2^{\sim})$. D'où le résultat par III.3.

IV. Cas particuliers

(1) *L'algèbre de Kac* $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ *est abélienne*

Grâce à [2, 8.2.9(b)], on peut supposer que $\mathbb{K} = KA(G)$, où G est un groupe localement compact [2, 8.1.1]. Grâce à I.3, il suffit de considérer une action continue de G sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$.

Théorème IV.1. *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ une algèbre de von Neumann, α une action continue de G sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. Soit γ l'action continue de G sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$, définie par $\gamma_t = \alpha_t \otimes \operatorname{Ad} \lambda(t)$. L'action $\alpha^{d\sim\sim}$ est fortement équivalente à γ^d.*

(Ce résultat a été trouvé indépendamment dans [7, Théorème 3.1].)

Démonstration. On a vu en III.7 que $\alpha^{d\sim\sim}$ est fortement équivalente à une action à droite β de $KA(G)$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$. De plus, on a, pour tout x de $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$ (par III.7.2)

$$\begin{aligned}(\alpha^d \otimes i \otimes i)\,\beta(x) = {}& (1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma W^*\sigma)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma \\ & \cdots (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)((\alpha^d \otimes i)(x) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma) \\ & \cdots (1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma W\sigma).\end{aligned}$$

En particulier, si x_1 appartient à $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, on a:

$$\begin{aligned}(\alpha^d \otimes i \otimes i)\,\beta(x_1 \otimes 1) = {}& (1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma W^*\sigma)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma \\ & \cdots (\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(\alpha^d(x_1) \otimes 1 \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma) \\ & \cdots (1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma W\sigma).\end{aligned}$$

Mais, comme $1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1$ appartient à $\mathbb{C}_{\mathfrak{K}} \otimes \mathscr{M}(G)' \otimes L^\infty(G) \otimes \mathbb{C}_{L^2(G)}$ (par [2, 2.1.5(b), 3.1.5(a) et 8.1.4(c)]), et $1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma W^*\sigma$ appartient à $\mathbb{C}_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \mathscr{M}(G) \otimes L^\infty(G)$, on en déduit (car $L^\infty(G)$ est abélienne) que $(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma W^*\sigma)$ et $(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1) \cdots (1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)$ commutent. On en déduit:

$$\begin{aligned}&(\alpha^d \otimes i \otimes i)\,\beta(x_1 \otimes 1) \\ &= (1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(\alpha^d(x_1) \otimes 1 \otimes 1) \\ &\quad \cdots (1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)(1_{\mathfrak{K}} \otimes (\hat{J} \otimes \hat{J})\,\sigma W^*\sigma(\hat{J} \otimes \hat{J}) \otimes 1)(1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma) \\ &= (1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma)[(i \otimes \Gamma)\,\alpha^d(x_1) \otimes 1](1_{\mathfrak{K}\otimes L^2(G)} \otimes \sigma) \qquad \text{par I.5(ii)} \\ &= (i \otimes s)[(i \otimes \Gamma)\,\alpha^d(x_1) \otimes 1] \\ &= (i \otimes s)[(\alpha^d \otimes i)\,\alpha^d(x_1) \otimes 1] \\ &= (i \otimes s)(\alpha^d \otimes i \otimes i)(\alpha^d \otimes i)(x_1 \otimes 1) \\ &= (\alpha^d \otimes i \otimes i)(i \otimes s)(\alpha^d \otimes i)(x_1 \otimes 1).\end{aligned}$$

Et donc, pour tout x_1 de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$

$$\beta(x_1 \otimes 1) = (i \otimes s)(\alpha^d \otimes i)(x_1 \otimes 1).$$

Soit maintenant x_2 dans $\mathscr{L}(L^2(G))$. On a:

$$(\alpha^d \otimes i \otimes i)\,\beta(1_{\mathscr{A}} \otimes x_2) = (1_{\mathscr{A}\otimes H} \otimes \sigma W^*\sigma)(1_{\mathscr{A}\otimes H} \otimes x_2 \otimes 1)(1_{\mathscr{A}\otimes H} \otimes \sigma W^*\sigma)$$

et donc

$$\beta(1_{\mathscr{A}} \otimes x_2) = 1_{\mathscr{A}} \otimes \sigma W^*\sigma(x_2 \otimes 1)\,\sigma W\sigma.$$

Grâce au lemme I.4, on vérifie facilement que $\gamma^d = \beta$.

COROLLAIRE IV.2. *Si G un groupe localement compact abélien, $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ une algèbre de von Neumann, α une action continue de G sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, $\alpha^\wedge$ l'action continue duale de $G^\wedge$ sur $W^*(\alpha^g)$ définie en* II.10(ii). *Il existe un isomorphisme de $\mathscr{W}^*(\alpha^{\wedge g})$ sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$ qui transporte l'action biduale $\alpha^{\wedge\wedge}$ de G sur $\mathscr{W}^*(\alpha^{\wedge g})$ en l'action γ de G sur $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$ introduite en* IV.1.

Démonstration. On a la suite d'équivalences suivantes, par II.10(ii), II.9(ii), I.10(ii) et II.8, II.9(ii) et II.8, IV.1

$$\alpha^{\wedge\wedge d} \approx \alpha^{\wedge g\sim} \approx \alpha^{\wedge d\sim} \approx \alpha^{g\sim\sim} \approx \alpha^{d\sim\sim} \approx \gamma^d.$$

D'où le résultat. On retrouve ainsi [11, Theorem 4.6].

(2) *$\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ est proprement infinie, M est à prédual séparable, et α vérifie la propriété A*

Si M_* est séparable, l'espace hilbertien H l'est aussi. Il existe un isomorphisme Φ: $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \to \mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathscr{L}(H)$.

L'isomorphisme Φ peut être construit de la façon suivante: soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de projecteurs de 2 à 2 orthogonaux de somme 1, équivalents à 1. Soient $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des isométries partielles de telles que $v_i{}^*v_i = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $v_iv_i{}^* = e_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (on a donc alors $v_i{}^*v_j = 0$ si $i \neq j$).

D'autre part, soient $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ des unités matricielles de $\mathscr{L}(H)$. Posons alors

$$\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} v_i{}^*xv_j \otimes u_{ij}\,.$$

On a, de plus

$$\Phi^{-1}(x \otimes 1) = \sum_{i=1}^{\infty} v_ixv_i{}^*.$$

THÉORÈME IV.3. *Soit α une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ à prédual séparable, sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ proprement infinie. On suppose que α*

vérifie la propriété A. Alors le double produit croisé $\mathscr{W}^*(\alpha^\sim)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}$, et l'action biduale $\alpha^{\sim\sim}$ est équivalente à α.

(Ceci généralise le théorème 4.8 de [11].)

Démonstration. Posons $\delta = (\Phi \otimes i)\alpha \circ \Phi^{-1}$. Alors, par I.8, δ est une action à droite de $\mathbb{K}$ sur $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H)$, et on a $\delta \approx (\Phi, i)$. On va montrer que l'opérateur $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)$ existe: en effet, pour $\xi \in \mathscr{h} \otimes H$, on a

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)\, \xi \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)\, \xi\|^2 \qquad \text{car} \quad v_i{}^* v_j = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(v_n{}^*)\, \xi\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(e_n)\, \xi\|^2$$

$$= \|\xi\|^2.$$

Posons

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*).$$

V est donc un opérateur isométrique de $\mathfrak{A} \otimes M$. Mais, d'autre part,

$$V^* = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(v_n)(v_n{}^* \otimes 1)$$

et on aussi, pour $\xi \in \mathscr{h} \otimes H$

$$\|V^*\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(v_n)(v_n{}^* \otimes 1)\, \xi\|^2 \qquad \text{car} \quad \alpha(v_i{}^*)\, \alpha(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|(v_n{}^* \otimes 1)\, \xi\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|(e_n \otimes 1)\, \xi\|^2$$

$$= \|\xi\|^2.$$

V est donc un unitaire de $\mathfrak{A} \otimes M$. On va montrer que c'est un α-cocycle. Remarquons d'abord que:

$$(i \otimes \Gamma)((v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)) = [(v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*) \otimes 1](\alpha \otimes i)((v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)).$$

On a donc

$$(i \otimes \Gamma)(V) = \sum_{n=1}^{\infty} (i \otimes \Gamma)[(v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [(v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*) \otimes 1](\alpha \otimes i)[(v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n{}^*)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1 \otimes 1)(\alpha(v_n{}^*) \otimes 1)(\alpha(v_n) \otimes 1)(\alpha \otimes i)\, \alpha(v_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1 \otimes 1)(\alpha \otimes i)\, \alpha(v_n{}^*).$$

Par ailleurs

$$(V \otimes 1)(\alpha \otimes i)(V)$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1 \otimes 1)(\alpha(v_n{}^*) \otimes 1)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(v_n) \otimes 1)(\alpha \otimes i)\, \alpha(v_n{}^*)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1 \otimes 1)(\alpha \otimes i)\, \alpha(v_n{}^*) \qquad \text{car} \quad \alpha(v_i{}^*)\, \alpha(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

donc V est un α-cocycle. Posons $u_n = \Phi(v_n)$ et $U = (\Phi \otimes i)(V)$. Clairement, U est un unitaire de

$$\mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H) \otimes M,$$

et

$$(i \otimes \Gamma)(U) = (U \otimes i)(\delta \otimes i)(U). \tag{IV.3.1}$$

Autrement dit, U est un δ-cocycle. Remarquons, de plus, que

$$u_i u_j{}^* = \Phi(v_i v_j{}^*) = \sum_{k,l=1}^{\infty} v_k{}^* v_i v_j{}^* v_l \otimes u_{kl} = 1 \otimes u_{ij}\,.$$

Calculons maintenant $U\delta(x)U^*$ ($x \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{L}(H)$). On a:

$$U\delta(1_{\mathfrak{A}} \otimes u_{ij})\, U^* = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \otimes 1)\, \delta(u_n{}^*)\right] \delta(u_i)\, \delta(u_j{}^*) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \delta(u_k)(u_k{}^* \otimes 1)\right]$$

$$= \sum_{n,k=1}^{\infty} (u_n \otimes 1)\, \delta(u_n{}^*)\, \delta(u_i)\, \delta(u_j{}^*)\, \delta(u_k{}^*)(u_k{}^* \otimes 1)$$

$$= u_i u_j{}^* \otimes 1 \qquad (\text{car } u_n{}^* u_i = 0 \text{ si } n \neq i)$$

$$= 1 \otimes u_{ij} \otimes 1.$$

On a donc, pour tout y de $\mathscr{L}(H)$:

$$U\delta(1_{\mathscr{k}} \otimes y)U^* = 1_{\mathscr{k}} \otimes y \otimes 1.$$

Par ailleurs, si x appartient à $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} &U\delta(x \otimes 1)\, U^* \\ &= (\Phi \otimes i)\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} (v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n^*)\right) \alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i x v_i^*\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(v_k)(v_k^* \otimes 1)\right)\right] \\ &= (\Phi \otimes i)\left[\left(\sum_{n,k,i=1}^{\infty} (v_n \otimes 1)\, \alpha(v_n^* v_i x v_i^* v_k)(v_k^* \otimes 1)\right)\right] \\ &= (\Phi \otimes i)\left(\sum_{i=1}^{\infty} (v_i \otimes 1)\, \alpha(x)(v_i^* \otimes 1)\right). \end{aligned}$$

Mais, si x_1 appartient à $\mathfrak{A}$, x_2 appartient à M, on a

$$\begin{aligned} &(\Phi \otimes i)\left(\sum_{i=1}^{\infty} (v_i \otimes 1)(x_1 \otimes x_2)(v_i^* \otimes 1)\right) \\ &\qquad = \Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i x_1 v_i^*\right) \otimes x_2 \\ &\qquad = x_1 \otimes 1 \otimes x_2 \\ &\qquad = (i \otimes s)(x_1 \otimes x_2 \otimes 1). \end{aligned}$$

Et donc, par linéarité et continuité, on a

$$U\delta(x \otimes 1)U^* = (i \otimes s)(\alpha(x) \otimes 1), \qquad \forall x \in \mathfrak{A}.$$

On a donc:

$$(i \otimes s)(\alpha \otimes i) \sim \alpha(\Phi, i, U).$$

Grâce au Théorème III.8, on en déduit le résultat.

V. Problèmes

(i) Toute action vérifie-t-elle la propriété A ?

(ii) Si α est une action à droite d'une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$, on posera

$$\mathfrak{A}^\alpha = \{x \in \mathfrak{A}, \alpha(x) = x \otimes 1\}.$$

Par II.6, on voit donc que

$$\alpha(\mathfrak{A}) \subset \mathscr{W}^*(\alpha)^{\alpha^\sim}.$$

L'égalité a lieu si l'algèbre de Kac est abélienne (voir par exemple [6, Proposition 2.3]). Dans [7, 6.4] l'égalité est démontrée si l'algèbre de Kac est symétrique.

L'égalité a-t-elle lieu dans tous les cas ?

(iii) On peut facilement démontrer qu'une réponse positive à l'une des deux questions ci-dessus entraîne une réponse positive à l'autre.

(iv) Dans [3], il est fourni une construction d'un poids opérationel (cf. [4]) du produit croisé d'une algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}$ par un groupe localement compact selon une action continue α, sur l'algèbre $\mathfrak{A}$. Cette construction peut facilement se généraliser, et on montre que $(i \otimes \varphi^{\wedge\prime}) \circ \alpha^\sim$ est un poids opérationel fidèle semi-fini $T_\alpha{}^\sim$ de $\mathscr{W}^*(\alpha)$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha)^{\alpha^\sim}$.

Si une réponse positive est trouvée au problème (ii) ci-dessus, en posant $\psi^\sim = \psi \circ \alpha^{-1} \circ T_\alpha{}^\sim$, on pourra faire correspondre à tout poids ψ normal sur $\mathfrak{A}$ un poids $\psi^\sim$ normal sur $\mathscr{W}^*(\alpha)$, ce qui généralise la construction du poids dual au sens de [1, 5, 8, 11].

Remerciements

L'élaboration de ce papier n'aurait pas été possible sans la collaboration quotidienne de Jean-Marie Schwartz, ce dont je le remercie. Je remercie Madame Chauvier, qui, malgré les délais très courts qui ont été imposés, a pu se charger de la frappe.

References

1. T. Digernes, Poids dual sur un produit croisé, *C. R. Acad. Sci. Paris* Ser. *A*, t. 278 (1974), 937–940.
2. M. Enock and J. M. Schwartz, Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France Suppl. Mem.* **44** (1975), 1–144.
3. M. Enock and J. M. Schwartz, Une nouvelle construction du poids dual sur le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact, *C. R. Acad. Sci. Paris* Ser. *A*, t. **282** (1976), 415–418.
4. U. Haagerup, "Operator Valued Weights in von Neumann Algebras," Odense Mat. Inst. Preprint No. 12, 1975.
5. U. Haagerup, "On the Dual Weights for Crossed Products of von Neumann Algebras," Odense Mat. Inst. Preprint No. 10, 1975.
6. M. Landstad, "Duality for Covariant Systems," Trondheim Preprint, 1974.
7. Y. Nakagami, Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **12** (1976).
8. J. L. Sauvageot, Sur le type du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact d'automorphismes, *C. R. Acad. Sci. Paris* Ser. A, t. 278 (1974), 941–944.

9. J. M. SCHWARTZ, Sur la structure des algèbres de Kac, *Ann. Inst. Fourier,* **17** (1977), fasc. 4.
10. M. TAKESAKI, Conditional expectations in von Neumann algebras, *J. Functional Analysis* **9** (1972), 306–321.
11. M. TAKESAKI, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.* **131** (1973), 249–310.